Math 3 (option économique)

École des Hautes Études Commerciales CONCOURS D'ADMISSION DE 1988

Mathématiques III

OPTION ÉCONOMIQUE *Samedi 7 mai 1988, de 8 h. à 12 h.*

La présentation, ... sur 15 cm de large. : voir Math 1 ou Math 2.

EXERCICE 1 Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

1. A l'aide d'un encadrement convenable de I_n, déterminer la limite de la suite (I_n).

2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = 1$.

3. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose : $J_n = n I_n$.

a) Montrer que : $J_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$.

b) Montrer que, pour tout nombre réel positif t : $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$.

En déduire la limite de la suite (J_n).

EXERCICE 2 I. Montrer que, pour tout nombre réel t : $-1 \leqslant \frac{2t}{1+t^2} \leqslant 1$.

II. On désigne désormais par f une fonction dérivable d'une variable réelle telle que, pour tout couple (x, y) de nombres réels :

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} \qquad (1)$$

1. Montrer que, pour tout nombre réel x : $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

2. Trouver toutes les fonctions constantes f vérifant la relation (1).

Dans la suite de l'exercice, on suppose que f n'est pas constante.

3. Montrer que, pour tout nombre réel x : $-1 < f(x) < 1$.

4. Calculer $f(0)$. On pose $a = f'(0)$.

5. En utilisant la définition de la dérivée, exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de a.

6. Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]-1, 1[$ et que la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur cet intervalle.
Calculer la dérivée de f^{-1}.

7. Expliciter $f^{-1}(y)$ en fonction de y et de a. Trouver enfin toutes les fonctions f non constantes, dérivables et vérifiant la relation (1).

EXERCICE 3 Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont la variance σ^2 existe et est non nulle. On suppose que X est symétrique, c'est-à-dire que X et $-X$ ont la même loi de probabilité.

1. Calculer l'espérance de X.

2. Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante de X, de loi de probabilité : $P(Z=1) = p$, $P(Z=-1) = 1-p$,

où p est un nombre réel tel que $0 < p < 1$. On pourra poser $q = 1-p$.
a) Montrer que la variable aléatoire ZX a la même loi que X.
b) Calculer la covariance des variables aléatoires X et ZX ; montrer que le coefficient de corrélation de X et de ZX ne dépend pas de σ^2.

3. On définit les variables aléatoires U, V et Y par les conditions : $U = \begin{cases} 1 \text{ si } X \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } X < 0 \end{cases}$, $V = \begin{cases} 1 \text{ si } X \leqslant 0 \\ 0 \text{ si } X > 0 \end{cases}$ et $Y = U - V$.

a) Montrer que la variable aléatoire Y est symétrique.
b) On note $|X|$ la valeur absolue de X. Comparer X et $Y|X|$. En déduire la valeur du coefficient de corrélation de Y et de $|X|$.
c) Montrer que les variables aléatoires Y et $|X|$ sont indépendantes si et seulement si $P(X=0) = 0$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail